

사장교의 초기평형상태 장력 결정

글 | 조현준 | 토목기술부 대리 || 전화 : 02-3433-7918 || E-mail : hjcho@ssyenc.com

1. 머리말

지역사회의 발전과 더불어 신속한 교통 인프라의 구축을 위해 섬과 섬, 육지와 육지를 잇는 교량이 빈번히 건설되고 있다. 이런 연도교와 연육교들은 항로폭의 확보와 자연경관과의 조화를 고려하여 사장교나 현수교와 같은 케이블 교량이 우선적으로 설계에 반영되고 있다.

근래에는 전 세계적으로 교량의 초장대화 추세로 접어들면서, 중앙경간이 1,000m가 넘는 사장교가 공용 중에 있고, 3,000m가 넘는 현수교가 시공 중에 있다.

우리나라의 경우, 현재 중앙경간이 800m인 인천대교(사장교)가 완공되어 개통을 준비하고 있고, 중앙경간이 1,545m인 광양대교(현수교)가 시공 중에 있다.



[그림 1] 인천대교(상)와 광양대교(하)



[그림 2] 수통대교(상 : 중국)와 메시나대교(하 : 이탈리아)

사장교는 주탑과 거더에 연결된 케이블의 인장력을 적절히 조절하여 각 구조부재의 단면력을 가능한 균등하게 분배시키는 교량형식으로, 설계자가 케이블에 도입되는 장력을 어떻게 결정하느냐에 따라 구조적 거동을 달리할 수 있다. 그러나 구조적 특성상, 고차의 부정정성을 띄고, 케이블의 비선형성과 사장 케이블로 인해 유발되는 거더와 주탑에서의 압축력은 구조물의 거동에 큰 영향을 미치기 때문에 이들을 적절히 반영한 효율적인 케이블 장력의 결정이 필요하다.

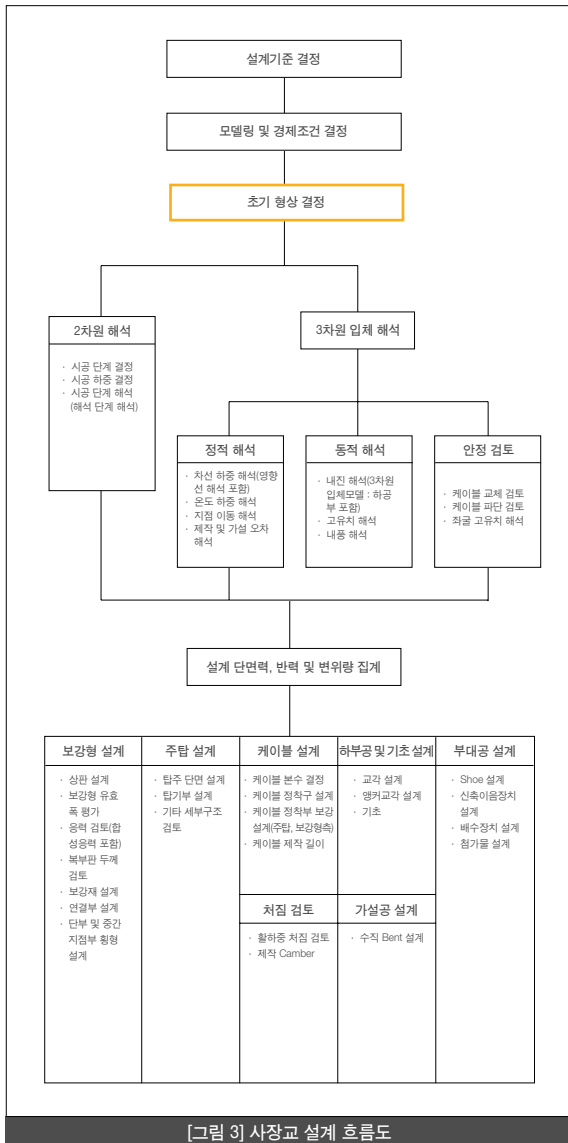
본고에서는 오차최소화기법을 적용하여 사장교의 초기평형상태 시 필요한 케이블 장력을 결정하는 방법에 대해 소개하기로 한다.

2. 초기평형상태의 결정

사장교를 설계하는 데 있어, 완성계시의 필요한 케이블 장력이나 무응력 길이를 결정하는 것을 초기평형상태 또는 초기형상 결정이라고 한다. 이는, 적절한 케이블 장력이나 무응력 길이를 산정하여

완성 후 구조물의 형상이 설계형상과 최대한 일치하도록 하고 주탑의 모멘트를 최소화하며 거더의 모멘트를 고르게 분포시키는데 그 목적이 있다.

[그림 3]은 일반적인 사장교의 설계절차를 나타낸 도표로, 초기평형상태의 결정은 이후 수행될 시공단계해석과 전체계 구조물에 대한 정·동적 해석의 기본적인 자료가 되기 때문에 매우 중요한 과정이다.



[그림 3] 사장교 설계 흐름도

2-1. 초기평형상태 결정 방법

초기평형상태의 케이블 장력을 결정하는 데 있어서 여러 가지 접근 방법이 있다. 이는 연속교의 거동과 같이 이상적인 처짐 형상이나 모멘트 분포를 유도하는 것에 그 목적을 두고 있기 때문에, 일반적으로 처짐을 제어하는 방법이나 단면력을 제어하는 방법을 사용한다.

이와 관련하여, 사장교의 복잡한 구조적 거동을 좀 더 효율적으로 해결하기 위한 해석적 기법들도 다양하게 연구되었다. 예를 들면, 고정하중에 의해 발생하는 장력을 초기장력으로 고려하여 그 값이 수렴할 때까지 반복 계산하는 반복법, 모든 부재의 부재력을 반대 방향의 초기하중으로 도입한 초기부재력법, 케이블의 무중력 길이를 변수로 하고 평형방정식과 기하학적 제한 조건식을 이용하여 초기 평형시의 케이블 장력을 구하는 방법인 TCUD(Target Configuration Under Deadload)법 등이 있다.

본 기고에서 소개하고자 하는 오차최소화기법은 사장교의 적절한 초기평형상태 결정을 위해 최소자승법을 이용하여 케이블 장력을 결정한다. 본 방법은 거더의 케이블 지지점을 지점으로 재구성한 연속보의 처짐 및 모멘트를 목표치로 정하고, 케이블을 포함한 전체계의 해석으로부터 구해진 응답과의 차이를 오차로 정의하여 거더 및 주탑의 오차를 최소화하는 방법이다. 특히 주탑 모멘트, 거더 모멘트, 그리고 처짐의 보정 정도를 가중행렬을 도입함으로써 설계자가 원하는 의도에 따라 선택적으로 조절할 수 있다는 장점이 있다.

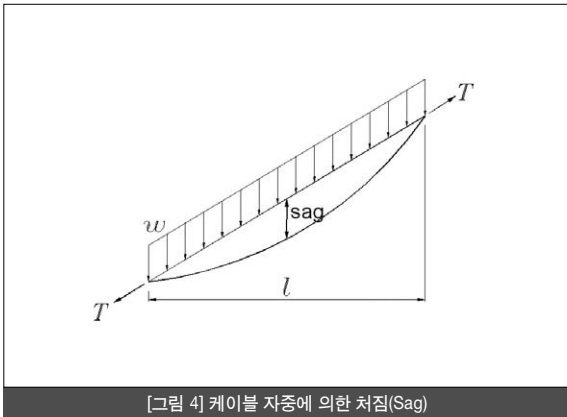
3. 사장교의 비선형 거동

사장교 해석시 비선형성을 고려해야 하는 주된 원인으로는 여러 가지가 있으며, 그 중에서 큰 영향을 미치는 요인으로는 새그(Sag)에 의한 케이블의 기하 비선형 거동과 거더와 주탑에 작용하는 큰 압축력에 의한 휨강성의 변화 등이 있다.

3-1. 케이블 부재의 비선형 거동

케이블은 양단이 지지되어 있고 자중과 외적으로 작용하는 축방향 인장력에 의해 [그림 4]와 같이 현수선의 형태로 처진다. 장대 경간 사장교에서는 케이블의 길이가 길어지고 케이블 자체의 자중이 커서 새그량이 커지므로 탄성계수가 현저하게 감소하게 되는데, 특

히 고정하중 상태에서 응력이 다른 부위에 비해 낮고 길이가 긴 단부에 정착되는 케이블에서는 이러한 탄성계수 감소의 영향이 더욱 심하다.



[그림 4] 케이블 자중에 의한 처짐(Sag)

이러한 새그의 영향을 고려하기 위하여 식(1)에 나타낸 바와 같이 케이블의 장력에 따른 새그의 탄성계수 저감효과를 고려한 Ernst의 등가탄성계수를 사용할 수 있다.

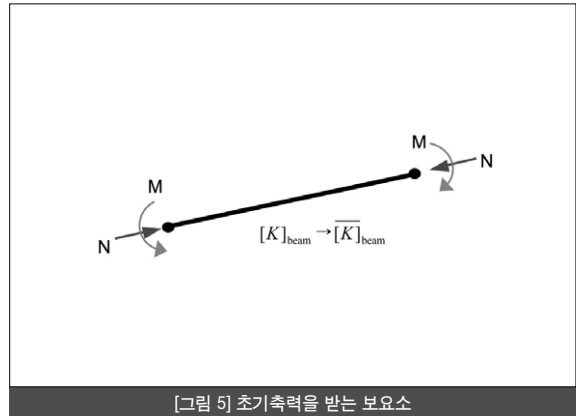
$$E_{eq} = \frac{E}{\left(1 + \frac{w^2 l^2}{12T^3} EA\right)} \quad (1)$$

$$E_{eq} = \frac{E}{\left(1 + \frac{w^2 l^2 (T_0 + T_1)}{24T_0^2 T_1^2} EA\right)} \quad (2)$$

여기서, E_{eq} 는 케이블 새그를 고려한 등가탄성계수로 w 는 케이블의 단위길이당 중량, l 은 케이블의 수평 길이이며, T 는 케이블에 작용하는 인장력이다. 한편, ASCE(American Society of Civil Engineers, 미국토목학회)에서는 식 (2)와 같이 초기장력, T_0 와 하중 재하후의 장력, T_1 을 도입하여 할선탄성계수를 잠정적으로 채택하고 있다.

3-2. 보-기둥 부재의 비선형성

사장교의 거더와 주탑에서는 큰 압축력과 휨모멘트가 동시에 작용하고, 이들의 상호작용으로 비선형 거동을 보인다. 이는 일반적으로 초기축력을 받는 보요소의 강성행렬이나 휨강성 감소의 영향을 반영하는 안정함수를 사용하여 그 효과를 고려할 수 있다.



[그림 5] 초기축력을 받는 보요소

4. 오차최소화기법을 적용한 초기평형상태 결정

사장교는 하중이 가해지면 케이블에 장력이 도입되면서 평형상태에 도달하게 되는데, 이 때 형상과 부재력이 설계자가 원하는 값으로 맞추어져야 한다. 따라서 초기평형상태를 결정하는 문제는 완성된 구조계의 거동과 부재력들이 적절한 상태에 이를 수 있도록 하는 케이블의 장력을 결정하는 것이라 할 수 있다.

일반적으로 가장 이상적인 상태는 1)거더는 케이블이 지지된 곳을 지점으로 한 연속교와 같은 모멘트 분포를 보이며 2)주탑부는 수평 처짐과 모멘트가 가급적 발생하지 않아야 한다.

그러나 사장교는 고차의 부정정 구조물이고 구조물의 비대칭성과 압축력에 의한 주탑과 거더의 축방향 변형 등으로 이러한 사항들을 모두 정확하게 만족하는 케이블 장력을 결정한다는 것은 거의 불가능하다.

오차최소화기법은 이상적인 상태에 부합하는 사장교에서의 처짐과 모멘트를 목표치로 정하고 목표치와 전체계 해석에서 구해진 처짐과 모멘트와의 차이가 최소가 되도록 최소자승법을 이용하여 적정 케이블 장력이 얻어질 때까지 반복 해석한다.

4-1. 최소자승법을 통한 오차의 최소화

구조계가 원하는 평형 상태에 이를 수 있도록 하는 케이블 장력을 산정하기 위해 맞추고자 하는 항목(처짐, 모멘트 등)으로 구성된 목표치 벡터, $\{D, M\}^0$ 와 전체계 해석 결과로부터 나온 그 항목들에 대한 해석치 벡터, $\{D, M\}^1$ 의 차이를 오차 벡터, $\{r\}^0$ 라 한다면 보정하여야 할 장력의 벡터, $\{A T\}^0$ 는 단위 장력에 의한 처짐과 모멘트의

응답으로 구성되는 영향행렬, $[F]$ 를 사용하여 다음 식과 같이 나타낼 수 있다. 여기서 n 는 해석의 반복 횟수를 말한다.

$$\{\Delta T\}^{(i)} = [F]^{-1}\{r\}^{(i)} = [F]^{-1}(\{D, M\}^{(0)} - \{D, M\}^{(i)}) \quad (3)$$

$$[F] = \begin{bmatrix} (f_{GD}^1 \cdots f_{GD}^k)_1^T & \cdots & (f_{GD}^1 \cdots f_{GD}^k)_n^T \\ (f_{TD}^1 \cdots f_{TD}^k)_1^T & \cdots & (f_{TD}^1 \cdots f_{TD}^k)_n^T \\ (f_{GM}^1 \cdots f_{GM}^k)_1^T & \cdots & (f_{GM}^1 \cdots f_{GM}^k)_n^T \\ (f_{TM}^1 \cdots f_{TM}^k)_1^T & \cdots & (f_{TM}^1 \cdots f_{TM}^k)_n^T \end{bmatrix} \quad (4)$$

GD : Girder Displacement TD : Tower Displacement
 GM : Girder Moment TM : Tower Moment

만약, 목표치 항목이 케이블의 개수와 일치한다면 영향행렬 $[F]$ 가 정방행렬이 되므로 각 케이블에 요구되는 장력을 구하는데 식 (3)가 직접 사용될 수 있지만, 일반적으로 보정하고자 하는 처짐 및 모멘트 항목 수가 케이블 수보다 많기 때문에 $[F]$ 는 정방행렬이 되지 않고 식 (3)는 부정방정식이 된다. 이 경우 최소자승법을 적용한 다음 식으로부터 장력의 보정량을 구할 수 있을 것이다.

$$\{\Delta T\}^{(i)} = ([F]^T [F])^{-1} [F]^T \{r\}^{(i)} \quad (5)$$

한편, 식 (5)에서 처짐과 모멘트를 동시에 보정하고자 할 경우 두 가지 경우를 고려할 필요가 있다. 즉, 보정 항목이 서로 다른 차원을 가지므로 차원에 대한 보정이 필요하거나, 또는 설계자가 의도하는 바에 따라 특정 항목에 대해 가중치를 부여하여 특정 항목을 집중적으로 보정하고자 할 경우가 있다. 따라서, 이러한 문제의 해결을 위해 가중행렬 $[\rho]$ 를 도입하면 식 (5)는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\{\Delta T\}^{(i)} = ([F]^T [\rho] [F])^{-1} [F]^T [\rho] \{r\}^{(i)} \quad (6)$$

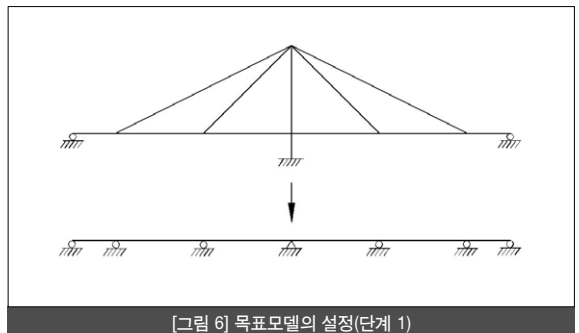
여기서, 가중행렬 $[\rho]$ 는 오차 항목 수 만큼의 행과 열을 가지는 정방행렬로서 각 항목 별로 가중치를 설정하여 식 (7)과 같이 구성할 수 있다. 여기서, ρ_{GD} , ρ_{TD} , ρ_{GM} , ρ_{TM} 은 각각 거더의 처짐, 주탑의 처짐, 거더 모멘트, 그리고 주탑 모멘트에 대한 가중치를 나타낸다.

$$[\rho] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (7)$$

4-2. 케이블 장력 산정 알고리즘

사장교는 주탑과 거더에 축방향으로 압축력이 발생하기 때문에 축방향 변형이 발생하는데 이것은 제작 캠버로 고려가 가능하다. 따라서, 가상의 큰 단면적을 사용하여 축방향 변형을 구속시킨 상태에서 최소자승법을 이용하여 케이블 장력을 보정하고 장력이 일정한 값에 수렴할 때까지 반복 수행하는 방법을 적용하였다. 그리고 가중행렬을 적절히 설정함으로써 특정 부재(거더 또는 주탑)의 처짐이나 모멘트를 선택적으로 보정할 수 있다. 그 단계별 과정은 다음과 같으며 세부적인 알고리즘은 그림 6에 나타내었다.

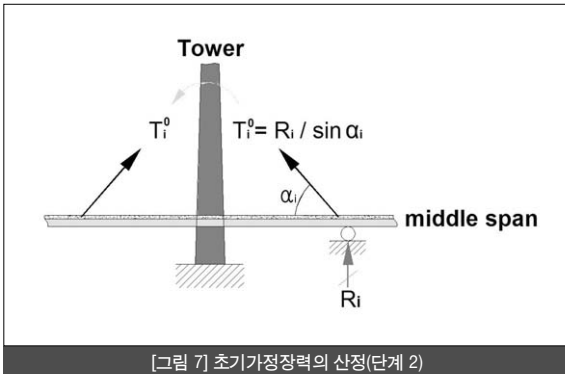
단계 1) 맞추고자 하는 목표 항목을 선정한다. 그림 6과 같이 케이블로 지지된 점을 지점으로 대치한 연속교(이하 연속교모델 혹은 Target Model)로부터 나온 처짐과 모멘트를 맞추어야 할 항목 수 만큼 목표치 벡터로 설정한다.



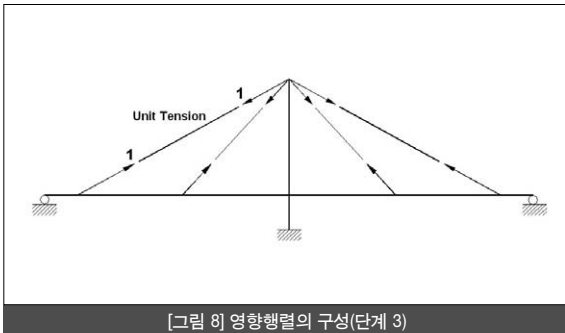
[그림 6] 목표모델의 설정(단계 1)

단계 2) 케이블 구조물의 해석시, 케이블 장력의 초기값 가정이 필요한데, 본 기고에서는 그림 7과 같이 단계 1에서 설정한 연속교

모델에서 중앙 경간의 지점 반력을 해당 케이블 경사의 정현성분으로 나누어 중앙 경간 케이블의 초기 장력으로 가정하고, 측경간 케이블 장력은 대응되는 중앙경간 케이블 장력을 적용한다.

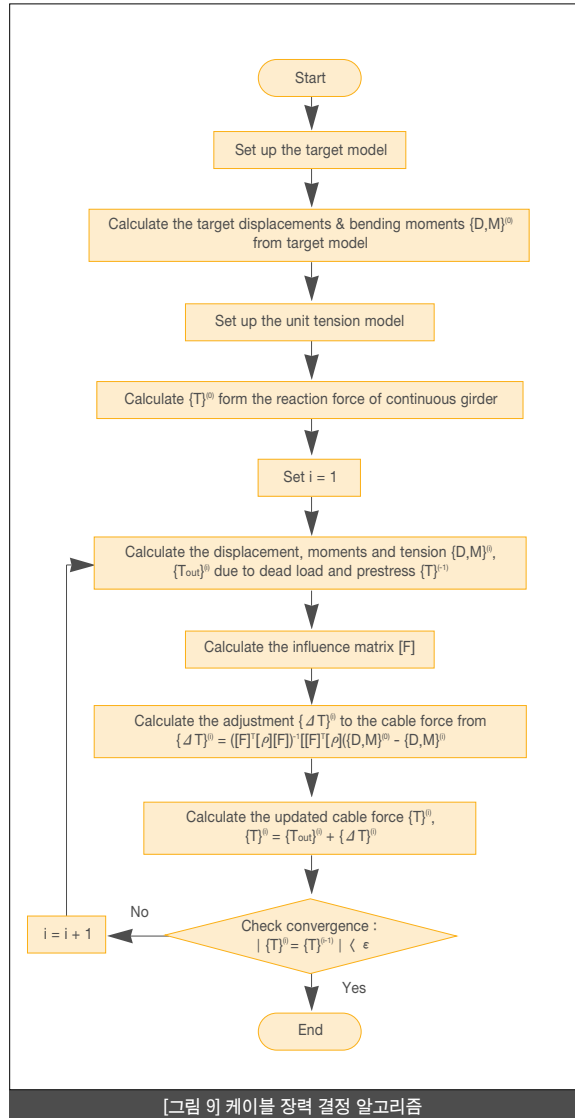


단계 3) 그림 8과 같이 케이블에 추가적인 단위장력을 작용시켜 맞추고자 하는 항목에 해당되는 점에서의 처짐과 모멘트 응답을 구하여 영향행렬을 구성한다. 그리고 필요시 가중행렬을 적절히 설정한다.



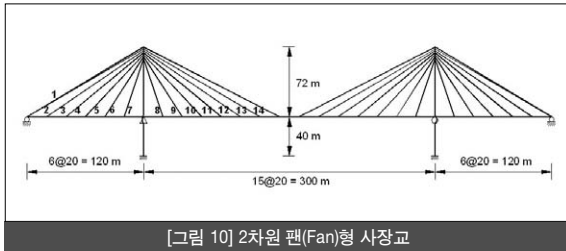
단계 4) 단계 1에서 설정한 목표치 벡터와 단계 2에서 가정한 초기 장력에 의한 전체계 해석으로부터 나온 처짐과 모멘트의 차이를 오차벡터로 설정하고 최소사승법에 의해 보정해야 할 장력을 산출한 뒤 보정한다.

단계 5) 케이블 장력의 변화량이 설정한 오차 범위 이내에 수렴할 때까지 단계 3-단계 4를 반복 수행하여 최종 초기평형상태의 장력을 결정한다.

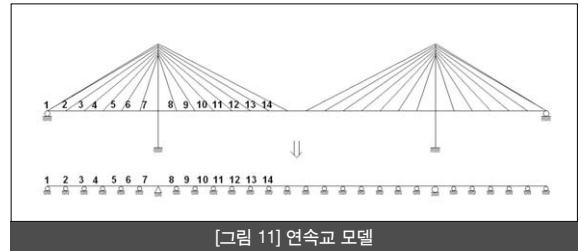


5. 예제 교량의 적용

앞서 설명한 케이블 장력 결정 기법을 2차원 멀티케이블 형식의 팬형 사장교에 적용하였다. 총 28개의 케이블로 구성되어 있으며, 총 지간이 540m(120m+300m+120m), 주탑의 높이가 112m로서 교량형상과 제원은 각각 그림 10)과 <표 1>에 나타내었다. 케이블은 Ernst의 등가탄성계수를 적용한 트러스 케이블 부재를 사용하였고, 주탑과 거더는 보-기둥요소를 사용하였다.



[그림 10] 2차원 팬(Fan)형 사장교



[그림 11] 연속교 모델

〈표 1〉 팬형 사장교의 단면상수 및 물성치

Member	E(GPa)	A(m ²)	l(m ²)	w(kN/m)
Cable	200	0.01	-	0.78
Girder	200	1.06	1.00	167.2
Tower	200	1.21	1.30	145.2

선택적인 모멘트 제어를 위해 가중행렬에서 거더와 주탑의 모멘트 부분의 가중치를 〈표 2〉와 같이 설정하였다. Case 2와 Case 3은 각각 거더와 주탑의 모멘트에 103의 가중치를 주어 모멘트를 중점적으로 목표치에 근접시키고자 한 것이다. 오차항목은 〈표 3〉과 같이 구성하였으며 영향행렬은 86(오차 항목수)×28(케이블 수)의 비정방 행렬이 된다. 거더 모멘트의 목표치를 설정하기 위한 연속교 모델은 [그림 11]과 같다.

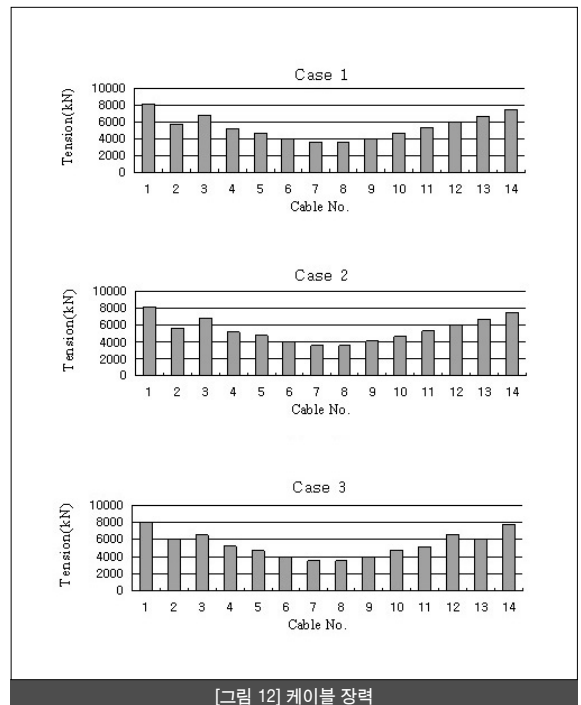
수렴조건으로, 케이블 장력 변화율의 0.1%를 적용하였으며, 최종적으로 결정된 초기평형상태의 케이블 장력은 [그림 12]와 같다.

〈표 2〉 가중치

Part	Case1	Case2	Case3
ρ_{GD}	1	1	1
ρ_D	1	1	1
ρ_{GM}	1	10^3	1
ρ_{TM}	1	1	10^3

〈표 3〉 오차항목 및 목표치

구분	오차항목(항목 수)	목표치
거더	수직 처짐(24)	수직 처짐 : 0
	모멘트(26)	연속교의 모멘트값
주탑	수평 처짐(14)	수평 처짐 : 0
	모멘트(22)	모멘트 : 0

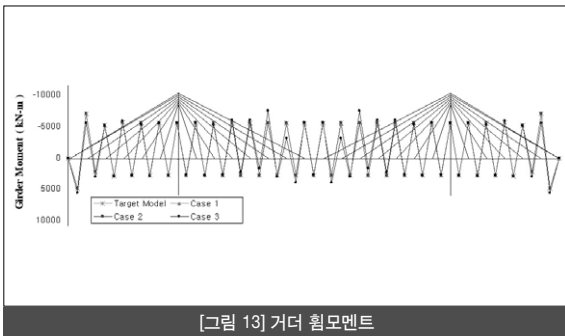


[그림 12] 케이블 장력

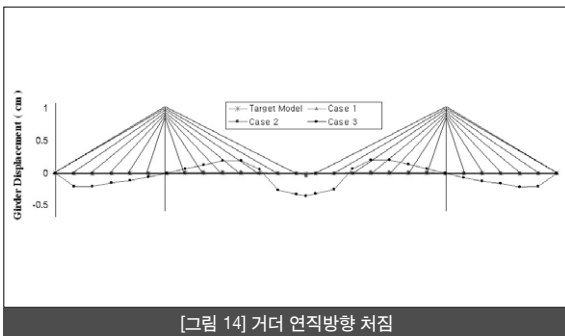
각 경우별 케이블 장력을 적용한 구조물의 모멘트와 처짐을 [그림 13]~[그림 16]에 나타내었다. [그림 13]은 거더 휨모멘트를, [그림 14]는 거더의 연직방향 처짐을 나타낸 것이고, [그림 15]는 주탑의 휨모멘트 분포를, [그림 16]은 주탑의 수평방향 처짐을 도시한 그림이다.

본 기법으로 결정된 장력을 도입함으로써 전체적으로 모멘트와 처짐이 연속교 모델로부터 설정한 목표치에 근접하는 결과가 나올 수 있다. 또한, 가중치에 따른 결과 차이를 살펴보면, 거더의 모멘트에 가중치를 둔 Case 2와 가중치를 모두 기본값으로 설정한 Case 1이 주탑 모멘트 부분에 가중치를 크게 둔 Case 3보다 거더 모멘트에 있어서는 연속교 모델의 거동에 더욱 가깝게 나타남을

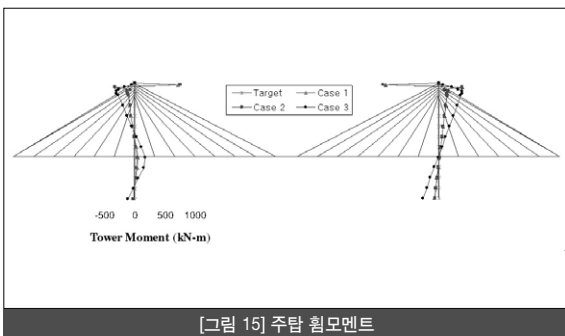
알 수 있다. 반면, 주탑의 모멘트에 가중치를 둔 Case 3의 경우에는 거더의 모멘트는 연속교 모델에서 다소 멀어졌으나 다른 경우에 비해 주탑의 모멘트가 목표치에 가까이 분포함을 알 수 있다. 따라서, 적절한 오차항목의 설정이나 가중행렬의 설정으로 원하는 항목을 목표치에 접근시킬 수 있다.



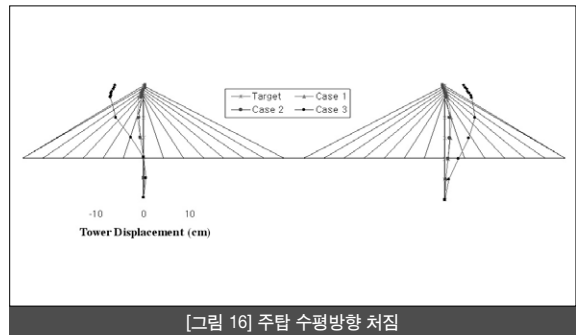
[그림 13] 거더 휨모멘트



[그림 14] 거더 연직방향 처짐



[그림 15] 주탑 휨모멘트



[그림 16] 주탑 수평방향 처짐

6. 맺음말

사장교의 적절한 초기평형상태 구현을 위해 오차최소화기법을 사용하여 케이블 장력을 결정하는 방법에 대해 알아보았다. 본 방법은 처짐과 모멘트를 동시에 최소화시킬 수 있고, 오차항목을 적절히 구성하거나 필요에 따라 가중행렬을 도입함으로써 거더 및 주탑의 처짐이나 모멘트를 선택적으로 제어할 수 있다. 케이블의 수가 많은 경우에도 행렬의 반복적 계산만으로 최적 장력을 산정할 수 있기 때문에 간단하면서도 실무적으로도 효율적인 방법이라 할 수 있다. S

참고문헌

1. 화명대학교 구조계산서, 2005, 부산광역시 건설본부
2. Tanaka H., and Kamei M. (1987) Cable Tension adjustment by Structural System Identification, Proceedings of the International Conference on Cable-Stayed Bridges, Bangkok, Thailand, pp.856-866.
3. Troitsky M.S. (1988) Cable-Stayed Bridges : theory and design, BSP Professional Books.
4. Gimsing, N. J. (1997), Cable Supported Bridges : Concept and Design, Second ed., John Wiley